Colle du 04/11 - Sujet 1
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Donner la somme géométrique.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 1. Ici i désigne le nombre complexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{4n} i^k k$.

Exercice 2. Soient $h : z \mapsto \frac{z-2}{i(2+z)}$ et $\mathscr{C} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$. Déterminer $h(\mathscr{C})$.

Colle du 04/11 - Sujet 2
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Enoncer la formule de Bernoulli.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j$.

Exercice 1. Calculer $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^7$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$.

Colle du 04/11 - Sujet 3
Complexes et calcul algébrique

Question de cours.

1. Enoncer la formule de Moivre.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe z vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, calculer $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (n-i)(n-j)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{U}$, on a

$$\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$